Institut für Kernphysik
Universität zu Köln

Bachelor-Praktikum

B3.1: Statistik der Kernzerfälle

Januar 2021

Der Zerfall mehrerer radioaktiver Atomkerne in einer Probe erfolgt vollkommen unabhängig voneinander und zu einem zufälligen Zeitpunkt. Trotzdem folgt z.B. die Zeitdifferenz zwischen zwei oder auch mehreren Zerfällen bestimmten Gesetzmäßigkeiten bzw. statistischen Verteilungen. Mit Hilfe eines einfachen Geigerzählers werden verschiedene Zeitintervallverteilungen aufgenommen und mit der Poisson- und Gauß-Verteilung verglichen. Ein χ^2-Test demonstriert den Einfluss der Messapparatur auf die Qualität der Messung.

1. Grundlagen

Dieser Versuch soll mit einigen Begriffen der Statistik vertraut machen und den Einfluss der Messapparatur auf die Messung demonstrieren.

Wir betrachten hier eine Ansammlung instabiler Kerne sowie einen Detektor, mit dem wir die Zerfälle der Kerne nachweisen. Die Zerfälle der Kerne finden unabhängig voneinander statt, d.h. der Zerfall oder Nicht-Zerfall eines beliebigen Kerns beeinflusst in keiner Weise den Zerfall oder Nicht-Zerfall eines beliebigen anderen Kerns. Das einzige, was wir wissen ist, dass es eine bestimmte feste Halbwertzeit $T_{1/2}$ gibt, nach der im Mittel die Hälfte der Kerne zerfallen sind. Wir betrachten hier zwei unterschiedliche Zufallsvariablen:

- die Anzahl der Zerfälle innerhalb eines festen Zeitintervalls
- die Zeitdifferenz zwischen zwei oder auch mehreren Zerfällen

Obwohl die Zerfälle unabhängig voneinander und zu einem zufälligen Zeitpunkt erfolgen, gehorchen diese Zufallsvariablen bestimmten Gesetzmäßigkeiten bzw. Verteilungen.

Die Messung einer Anzahl von Zerfällen wird durch die sog. Totzeit unseres Detektors (hier ein Zählrohr) beeinflusst. Die Messapparatur beeinflusst also das Messergebnis. Die entsprechenden Zusammenhänge werden hier untersucht.

Der anspruchsvollste Teil dieses Versuchs besteht aus der Durchführung des sog. χ^2-Tests unter Berücksichtigung der Totzeit des Detektors. Der χ^2-Test ist ein Verfahren, mit dem wir testen können, ob zwei Verteilungen übereinstimmen.

Diese Anleitung erklärt zunächst ein paar zum Verständnis nötige Grundbegriffe, wie Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilung. Anschließend wird direkt auf die für diesen Versuch wichtigen Verteilungen eingegangen. Es folgen Erläuterungen zur Totzeit. Insbesondere wird der Einfluss der Totzeit auf eine gemessene Verteilung betrachtet. Anschließend wird der χ^2-Test behandelt.

Neben der kurzen Einführung in die Statistik, die im Folgenden gegeben wird, gibt es zahlreiche Bücher die über das Netz (bzw. das VPN) der Universität online im Volltext verfügbar sind, z.B. [1–4]. Auch Bücher über Detektoren und Strahlungsmessung enthalten oft ein entsprechendes Kapitel [5, 6].

1.1. Zufallsvariablen

Die Ereignisse von Zufallsexperimenten können sehr unterschiedlich aussehen, zum Beispiel „Herz-Bube“ beim Ziehen einer Skatkarte oder „Zahl-Wappen-Wappen“ beim dreimaligen Werfen einer Münze. Um mit den Ergebnissen von Zufallsexperimenten rechnen zu können, müssen diese in reelle Zahlen transformiert werden. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- Das Zufallsexperiment liefert mehr oder weniger direkt eine Zahl als Ergebnis, zum Beispiel beim Werfen eines Würfels.
- Bei mehrfach durchgeführten Zufallsexperimenten wird die Anzahl verwendet, mit der ein bestimmtes Ereignis vorkommt, zum Beispiel Anzahl der Wappen beim mehrmaligen Werfen einer Münze.
- Jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments kann eine beliebige Zahl zugeordnet werden, zum Beispiel Wappen gleich 0, Zahl gleich 1.

In allen Fällen liegt eine eindeutige Abbildung vor, die jedem (Elementar-) Ereignis ω des Zufallsexperiments eindeutig eine reelle Zahl zuordnet. Diese Funktion X wird als **Zufallsvariable** bezeichnet.

$$X : \omega \rightarrow x(\omega); x(\omega) \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Eine Zufallsvariable kann diskret (z.B. Ziehung der Lottozahlen) oder kontinuierlich (z.B. Zeit zwischen dem Eintreffen zweier Straßenbahnen) sein. In der Physik kann ein Zufallsexperiment u.a. so aussehen, dass mit einem Germaniumdetektor die Energie eines Photons gemessen wird. Die gemessene Energie E_g wird nicht exakt mit der tatsächlichen Energie E_t übereinstimmen. Die Zufallsvariable (also die oben definierte Funktion) ist in diesem Fall nicht ohne weiteres anzugeben. Sie hängt nicht nur von der Energie E_t des Photons, sondern auch von vielen anderen Umständen wie der Temperatur des Detektors ab.

1.2. Wahrscheinlichkeitsverteilung, -dichte und -funktion

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** einer Zufallsvariable X ist diejenige Funktion $F(x)$, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine entsprechende Zufallsvariable einen Wert kleiner gleich x annimmt. Die Zufallsvariable X kann hierbei kontinuierlich oder diskret sein.

diskrete Zufallsvariable Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** $f(x)$ ist diejenige Funktion, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, dass die Zufallsvariable X den Wert x annimmt. Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt dann

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \tag{2}$$

kontinuierliche Zufallsvariable Die **Wahrscheinlichkeitsdichte** $f(x)$ ist diejenige Funktion, für die gilt:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy \tag{3}$$

Im Falle einer diskreten Zufallsvariablen ist die entsprechende Wahrscheinlichkeitsfunktion also diejenige Funktion, die uns direkt die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse angibt. Im Falle der kontinuierlichen Zufallsvariablen ist dies nicht möglich, denn da es überabzählbar viele Ereignisse gibt, ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Ereignisses gleich Null. Hier können wir nur eine Funktion angeben, die uns sagt, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Ereignisse in einem bestimmten Bereich liegen. Diese Wahrscheinlichkeiten erhalten wir durch Integration über die Dichtefunktion.

$$P = \int_a^b f(x)dx \tag{4}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt uns sowohl für diskrete als auch für kontinuierliche Zufallsvariablen an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Wert kleiner gleich x auftritt. In der Literatur werden die oben definierten Begriffe manchmal nicht sauber getrennt, sodass z.B. mit dem Begriff Gauß-Verteilung streng genommen die entsprechende Dichtefunktion gemeint ist.

1.3. Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist die wohl wichtigste diskrete Verteilung. Ihr liegt folgendes Prinzip zugrunde: Die Basis ist ein Zufallsexperiment, das genau zwei mögliche, sich gegenseitig ausschließende Ereignisse A und B haben kann. Für die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$ des Eintretens dieser Ereignisse gelte

$$\begin{aligned} P(A) &= p \\ P(B) &= 1 - p \end{aligned} \tag{5}$$

Das Zufallsexperiment werde N-mal durchgeführt, wobei die Ergebnisse der Wiederholungen unabhängig von den bisher durchgeführten Zufallsexperimenten sind. Von Interesse ist, unabhängig von der Reihenfolge, die Anzahl n, mit der bei N Wiederholungen das Ereignis A auftritt.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis A genau n-mal eintritt, lässt sich folgendermaßen herleiten:

Es wird angenommen, das Ereignis A sei die ersten n-mal eingetreten, die nächsten $(N-n)$-mal nicht:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies in genau dieser Reihenfolge geschieht, beträgt:

$$\underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{n\text{-mal}} \cdot \underbrace{(1-p) \cdot (1-p) \cdot \ldots \cdot (1-p)}_{(N-n)\text{-mal}} = p^n \cdot (1-p)^{N-n} \tag{6}$$

Dasselbe Ereignis, nämlich n-maliges Eintreten von A bei N-facher Wiederholung des Experiments, kann auch durch eine andere Anordnung der Einzelereignisse A und B erreicht werden, die alle dieselbe Wahrscheinlichkeit $p^n \cdot (1-p)^{N-n}$ besitzen. Die Anzahl der möglichen Anordnungen kann mit Hilfe der Kombinatorik berechnet werden und entspricht einer Kombination ohne Wiederholung. Es gilt dann:

$$P(N, n, p) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \tag{7}$$

Die Binomial-Verteilung besitzt den Erwartungswert $m = Np$ und die Varianz $\sigma^2 = Np(1-p)$.

Beispiel I Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei 10 Würfen mit einem Würfel genau dreimal eine 6 zu werfen?

$$P(10, 3, 1/6) = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0.155 \tag{8}$$

Beispiel II Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach der Zeit t von 10^{20} instabilen Atomkernen genau 10^5 zerfallen sind? Die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Kern innerhalb der Zeit t zu zerfallen sei p. Das Zufallsexperiment wird hier nicht N-mal hintereinander, sondern gleichzeitig durchgeführt, indem N identische Kerne gleichzeitig betrachtet werden.

$$P(10^{20}, 10^5, p) = \binom{10^{20}}{10^5} p^{10^5} (1-p)^{10^{20}-10^5} \tag{9}$$

Aus diesem Beispiel wird ersichtlich, dass die Binomialverteilung unter Umständen numerisch sehr unhandlich werden kann.

1.4. Zerfallswahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit ω, dass ein instabiler Atomkern mit einer Halbwertszeit $T_{1/2}$ innerhalb einer bestimmten Zeitspanne $\Delta t \ll T_{1/2}$ zerfällt, beträgt

$$\omega = \alpha \Delta t \tag{10}$$

wobei α eine für das betreffende Isotop charakteristische Konstante ist, die wir **Zerfallswahrscheinlichkeit** nennen. Die Wahrscheinlichkeit für das Nicht-Zerfallen ist entsprechend

$$1 - \omega = 1 - \alpha \Delta t \tag{11}$$

Diese Gleichungen gelten nur für kleine (streng genommen nur für infinitesimal kleine) Δt. Ansonsten würde die Wahrscheinlichkeit ω für genügend großes Δt auf einen Wert größer 1 anwachsen. Die Wirklichkeit sieht so aus, dass $\omega(t)$ bei Null beginnt, dann ansteigt und sich für große Zeiten immer weiter an 1 annähert.

Wir leiten nun einen Ausdruck für beliebige Δt her. Dazu unterteilen wir unsere Zeitspanne Δt in k gleichlange Zeitabschnitte. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann das Produkt der Wahrscheinlichkeiten bezüglich der einzelnen Abschnitte. Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit, dass der instabile Kern nicht zerfällt.

$$1 - \omega = \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{k}\right)^k \tag{12}$$

Da der Ausdruck in der Klammer nur für infinitesimale Zeitabschnitte exakt ist, betrachten wir den Grenzwert $k \to \infty$.

$$1 - \omega = \lim_{k \to \infty} \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{k}\right)^k = e^{-\alpha t} \tag{13}$$

Dies ist die Nicht-Zerfallswahrscheinlichkeit für endliche Zeiten, die Wahrscheinlichkeit für das Zerfallen ist daher

$$\omega(t) = 1 - e^{-\alpha t} \tag{14}$$

Ist die **Halbwertszeit** $T_{1/2}$ bekannt, können wir α leicht berechnen.

$$\omega(T_{1/2}) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\alpha T_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -\frac{\ln(1/2)}{T_{1/2}} \tag{15}$$

Wir betrachten hier als Beispiel das Isotop ^{137}Cs. Die Halbwertszeit beträgt etwa 30.17 Jahre, das sind etwa 9.5×10^8 s. Für die Zerfallswahrscheinlichkeit erhalten wir in diesem Fall

$$\alpha = -\frac{\ln(1/2)}{9.5 \times 10^8 \text{ s}} = 7.3 \times 10^{-6} \, \frac{1}{\text{s}} \tag{16}$$

Im Allgemeinen hat man es jedoch nicht nur mit einem Atomkern, sondern mit einer sehr großen Anzahl N (z.B. N von der Größenordnung 10^{20}) zu tun. Wir wollen nun einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit $\omega(N, n, t)$ finden, das von diesen N während der Zeit t genau n zerfallen. Es sollen also n Teilchen zerfallen und $N-n$ nicht zerfallen. Es gibt jedoch mehrere Möglichkeiten, welche der N Teilchen zerfallen bzw. nicht zerfallen. Die Anzahl dieser Möglichkeiten ist durch den Binomialkoeffizienten gegeben, denn N über n ist genau die Anzahl von Möglichkeiten, aus einer Menge mit N Elementen n zu ziehen. Damit erhalten wir

$$\omega(N, n, t) = \binom{N}{n} \cdot (1 - e^{-\alpha t})^n e^{-\alpha(N-n)t} \tag{17}$$

Um die Formel handlicher zu machen, führen wir noch eine Abkürzung ein.

$$p := 1 - e^{-\alpha t} \tag{18}$$

Damit erhalten wir:

$$P(N, n, p) = \binom{N}{n} \cdot p^n (1 - p)^{N-n} \tag{19}$$

$P(N, n, p)$ gibt uns direkt die Wahrscheinlichkeit an, dass nach der Zeit t von den N instabilen Kernen n zerfallen sind. $P(N, n, p)$ ist also eine Wahrscheinlichkeitsfunktion.

1.5. Poisson-Verteilung

Die **Poisson-Verteilung** ist, wie die Binomialverteilung, eine diskrete Verteilung. Ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion lautet:

$$P(n, \lambda) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \tag{20}$$

Die Poisson-Verteilung hat den Mittelwert $m = \lambda$ und die Varianz $\sigma^2 = \lambda$.

Zusammenhang zwischen Binomial- und Poisson-Verteilung Die Poisson-Verteilung ist die Grenzverteilung der Binomial-Verteilung für $N \to \infty$ und $p \to 0$ sowie der Nebenbedingung, dass das Produkt $Np = \lambda$ konstant ist. λ ist dann für alle in der Grenzwertbildung betrachteten Binomial-Verteilungen wie auch für die Poisson-Verteilung der Erwartungswert.

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} P(n) &= \lim_{N\to\infty} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{N!}{(N-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{N-n} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{(N-n+1)\dots(N-2)(N-1)N}{N^n}\right) \left(\frac{\lambda^n}{n!}\right) \left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N \left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{-n} \\
&= \frac{\lambda^n}{n!} \lim_{N\to\infty} \underbrace{\left(\frac{N}{N}\cdot\frac{N-1}{N}\cdot\frac{N-2}{N}\dots\frac{N-n+1}{N}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{-n}}_{\to 1} \\
&= \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}
\end{aligned} \tag{21}$$

Eine Faustregel besagt, dass diese Näherung brauchbar ist, sofern $Np \leq 10$ gilt.

1.6. Gaußverteilung (Normalverteilung)

Die **Gauß- oder Normalverteilung** ist eine kontinuierliche Verteilung. Ihre Wahrscheinlichkeitsdichte ist gegeben durch

$$P(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{22}$$

Dabei ist μ der Mittelwert und σ^2 die Varianz. Gilt $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$, so nennt man diese spezielle Normalverteilung eine **Standardnormalverteilung**.

Zusammenhang zwischen Poisson- und Gaußverteilung Die Poisson-Verteilung

$$P(n, \lambda) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \tag{23}$$

konvergiert für große λ gegen die Normalverteilung

$$P(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2\lambda}} \tag{24}$$

Satz von Moivre-Laplace Nach dem Satz von Moivre-Laplace konvergiert die Binomial-Verteilung

$$P(N, n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \tag{25}$$

für $N \to \infty$ und $0 < p < 1$ gegen die Normal-Verteilung

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Np(1-p)}} e^{-\frac{(x-Np)^2}{2Np(1-p)}} \tag{26}$$

Eine Faustregel besagt, dass diese Näherung brauchbar ist, falls gilt: $Np(1-p) \geq 9$. Je asymmetrischer also die Binomial-Verteilung ist, desto größer muss N sein, bevor die Normalverteilung eine gute Näherung liefert.

1.7. Intervallverteilung

Die bisher besprochenen Verteilungen (Binomial-, Poisson- und Gaußverteilung) beschreiben die Wahrscheinlichkeiten für das Zerfallen von Kernen innerhalb einer festen Zeitspanne t.

Hier behandeln wir nun die Frage nach den Zeitdifferenzen zwischen dem Zerfallen zweier Kerne. Wir betrachten also wieder eine Ansammlung von N instabilen Kernen und wollen wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zeitdifferenz zwischen zwei aufeinander folgenden Zerfällen der Wert Δt annimmt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist das Produkt $W = W_1 \cdot W_2$ der folgenden zwei Einzelwahrscheinlichkeiten:

- In der Zeit Δt darf kein Zerfall stattfinden. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit liefert uns die Poisson-Verteilung mit $n = 0 : W_1 = e^{-\lambda}$.
- Danach muss in der Zeit dt ein Zerfall stattfinden. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $W_2 = a \cdot dt$, wobei a hier die entsprechende Zerfallswahrscheinlichkeit ist.

Damit haben wir also:

$$W = e^{-\lambda} a dt \tag{27}$$

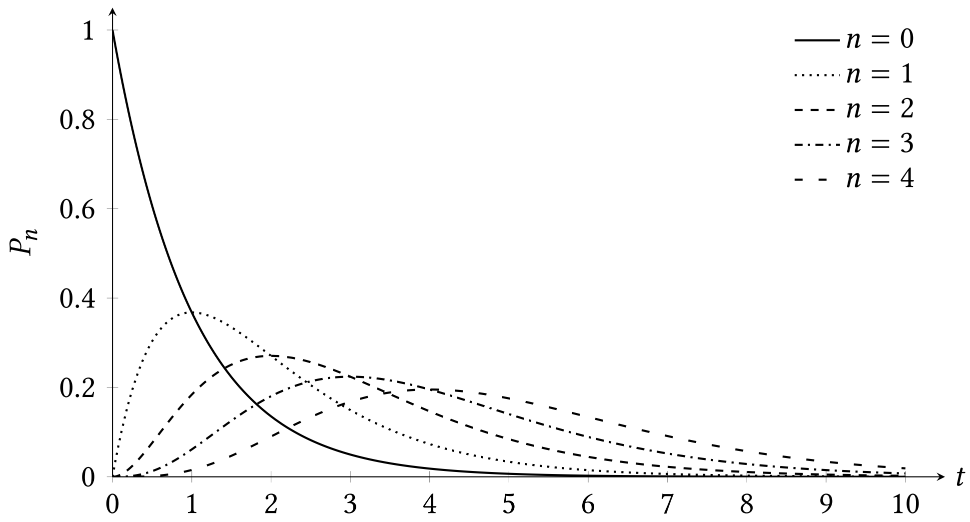


Abbildung 1: Die Intervallverteilung (Gleichung 30) für $a = 1$ und verschiedene Untersetzungen.

Die Konstante a ist hier die Zerfallswahrscheinlichkeit für unser Ensemble von Kernen. Der Mittelwert ist daher einfach $\lambda = a \cdot t$. Damit erhalten wir

$$W = e^{-at} a dt \tag{28}$$

Da wir durch Integration über die Wahrscheinlichkeitsdichte zur Wahrscheinlichkeit kommen, müssen wir hier also ableiten, um die Dichtefunktion zu erhalten.

$$P = e^{-at} a \tag{29}$$

Völlig analog zur vorrangegangenen Diskussion folgt die Dichtefunktion dafür, dass zwischen den beiden betrachteten Ereignissen noch n weitere liegen:

$$P_n = a \frac{(at)^n}{n!} e^{-at} \tag{30}$$

Diese Verteilung trägt den Namen **Intervallverteilung**.

1.8. Zählrohr

Das Geiger-Müller Zählrohr ist ein einfaches Instrument zum Nachweis von ionisierender Strahlung. Es besteht im Wesentlichen aus einem gasgefüllten Zylinderkondensator mit dünnem zentralen Anodendraht. Tritt ein Strahlungsquant in das Gas ein, so werden Gasteilchen ionisiert. Die dadurch entstehenden freien Elektronen bewegen sich durch das elektrische Feld zur Anode und lösen durch Stoß-Ionisation weiterer Gasteilchen Elektronenlawinen aus, insbesondere im Bereich der hohen Feldstärke in der Nähe des Anodendrahtes. Die angeregten Gasteilchen regen sich ab durch Emission von Photonen mit Wellenlängen im Bereich des sichtbaren Lichts oder der UV-Strahlung. Diese Photonen sind elementar für die Ausbreitung einer Kettenreaktion, die sogenannte Geiger-Entladung: Durch photoelektrische Absorption der Photonen werden weitere freie Elektronen erzeugt, die wiederum Elektronenlawinen auslösen können, sodass eine großräumige Entladung im Zählrohr stattfindet unabhängig vom Ort der ursprünglichen Ionisation. Die Entladung endet erst, wenn die langsam radial nach außen wandernde Wolke ionisierter Gasteilchen die Feldstärke genügend verringert hat. Während dieser relativ langen Zeit, der Totzeit, ist ein Nachweis weiterer Strahlungsquanten nicht möglich.

Zusätzlich muss das Zählrohr so betrieben werden, dass Mehrfachentladungen durch weitere Ionisierungseffekte von Gasatomen an der Kathodenoberfläche vermieden werden. Dies wird beim hier verwendeten Zählrohr erreicht, indem ein hochohmiger Widerstand mit etwa 10^8 Ohm zwischen Hochspannungsversorgung und Anode geschaltet wird. Dies führt dazu, dass die Hochspannung nach einer Entladung für eine gewisse Zeit zu gering ist, um weitere Entladungen auszulösen. Das bezeichnet man als *external quenching*, d.h., externes Ablöschen. Man erhält so allerdings lange Totzeiten im Millisekundenbereich.

Durch den Funktionsmechanismus des Zählrohrs haben die Stromimpulse, die an der Anode gemessen werden können, im Gegensatz zum Proportionalzählrohr alle die gleiche Amplitude. Das Geiger-Müller Zählrohr erlaubt daher keine Messung der Energie der Strahlung. Vorteil ist aber einerseits die hohe Empfindlichkeit, da zur Auflösung einer Gasentladung bereits ein einzelnes Elektron aus der primären Ionisation ausreicht, andererseits die Höhe der Stromimpulse an der Anode, die einen Betrieb ohne aufwändige Verstärker ermöglicht. Daher werden Geiger-Müller Zählrohr heute noch im Bereich des Strahlenschutzes, z.B. zur Überwachung von Gamma-Dosisleistungen, eingesetzt. Weiterführende Literatur: [5, 6]

1.9. Totzeit

Mit dem Begriff **Totzeit** wird folgendes bezeichnet: Eine Zeitspanne unmittelbar nach dem Nachweis eines Teilchens, während der ein Teilchendetektor noch nicht wieder bereit ist, ein weiteres Teilchen nachzuweisen (Totzeit im Sinne der Teilchenmesstechnik). Genaugenommen kann auch eine Elektronik eine Totzeit haben, in dem hier diskutierten Fall ist das jedoch ohne Belang.

Nach dem Nachweis eines Teilchens kann also für eine bestimmte Zeit τ kein weiteres registriert werden. Die gemessene Zählrate a' ist daher kleiner als die tatsächliche Zählrate a. Für jedes detektierte Teilchen muss man also $a\tau$ Teilchen dazuzählen. Daher gilt:

$$a'(1 + a\tau) = a \tag{31}$$

Durch Umformen ergibt sich

$$a = \frac{a'}{1 - a'\tau} \tag{32}$$

Für den gemessenen Mittelwert m' und den wahren Mittelwert m der Anzahl von Ereignissen im Zeitintervall T erhalten wir:

$$m = aT = a\frac{m'}{a'} = \frac{m'}{1 - a'\tau} \tag{33}$$

Wenn die Messwerte aus einer Poisson-Verteilung stammen, dann gilt außerdem $\sigma^2 = m$ und die Verteilung besitzt die gleiche relative Breite wie die ursprüngliche.

$$\frac{\sigma}{m} = \frac{\sigma'}{m'} = \frac{1}{\sqrt{m}} \tag{34}$$

oder

$$\sigma'^2 = \frac{m'^2}{m} = m' \cdot \frac{a'}{a} \tag{35}$$

Insgesamt folgt also

$$\sigma'^2 = m' \cdot (1 - \tau a') \text{ bzw } \sigma^2 = \sigma'^2 \cdot \left(\frac{a}{a'}\right)^2 = \frac{m'}{1 - \tau \cdot a} = m \tag{36}$$

Da gilt $a/a' \geq 1$, ist die gemessene (also die nicht totzeit-korrigierte) Verteilung also schmaler als die wahre Verteilung. Dies macht sich insbesondere bei einem χ^2-Test durch ein zu kleines χ^2 bemerkbar.

1.10. Zwei-Präparate-Methode

Die Zwei-Präparate-Methode dient zur Messung der Totzeit. Hierzu messen wir bei einer festen Zählrohrspannung die Zählrate mit Präparat 1, mit Präparat 2 sowie mit beiden Präparaten gleichzeitig. Außerdem wird die Untergrundzählrate ermittelt. Die entsprechenden Zählraten seien z_1', z_2', z_{12}' und u'. Die entsprechenden wahren Zählraten seien z_1, z_2, z_{12} und u. Die wahren Zählraten z_1, z_2, z_{12} setzen sich aus zwei Teilen zusammen. Ein Teil wird durch die Präparate hervorgerufen, der andere durch den Untergrund. Die durch die Präparate zustande kommenden Zählraten seien p_1, p_2 und p_{12}, sodass gilt:

$$z_1 = p_1 + u \qquad z_2 = p_2 + u \qquad z_{12} = p_{12} + u \tag{37}$$

Die Totzeit sei τ, dann gilt:

$$z_1 = \frac{z_1'}{1 - z_1'\tau} \qquad z_2 = \frac{z_2'}{1 - z_2'\tau} \qquad z_{12} = \frac{z_{12}'}{1 - z_{12}'\tau} \qquad u = \frac{u'}{1 - u'\tau} \tag{38}$$

Die Idee der Zwei-Präparate-Methode liegt nun darin, die Additivität der Präparatzählraten auszunutzen.

$$p_{12} = p_1 + p_2 \tag{39}$$

Damit ist das Problem prinzipiell gelöst, denn wir haben nun 8 Unbekannte (z_1, z_2, z_{12}, u, p_1, p_2, p_{12} und τ) und 8 Gleichungen. Dieses Gleichungssystem lässt sich recht einfach lösen. Zunächst ersetzen wir in Gleichung 39 die entsprechenden Terme aus Gleichung 37 ein.

$$z_{12} - u = z_1 - u + z_2 - u \quad \Leftrightarrow \quad z_{12} + u = z_1 + z_2 \tag{40}$$

Nun benutzen wir Gleichung 38 und erhalten:

$$\frac{z'_{12}}{1 - z'_{12}\tau} + \frac{u'}{1 - u'\tau} = \frac{z'_1}{1 - z'_1\tau} + \frac{z'_2}{1 - z'_2\tau} \tag{41}$$

Diese Gleichung müssen wir nur noch nach τ auflösen. Dazu multiplizieren wir beide Seiten mit $(1 - z'_{12}\tau)(1 - z'_1\tau)(1 - z'_2\tau)(1 - u'\tau)$ und erhalten

$$\begin{aligned} z'_{12}(1 - z'_1\tau)(1 - z'_2\tau)(1 - u'\tau) + u'(1 - z'_{12}\tau)(1 - z'_1\tau)(1 - z'_2\tau) = \\ z'_1(1 - z'_{12}\tau)(1 - z'_2\tau)(1 - u'\tau) + z'_2(1 - z'_{12}\tau)(1 - z'_1\tau)(1 - u'\tau) \end{aligned} \tag{42}$$

Dies sieht zunächst nach einer kubischen Gleichung für die Totzeit τ aus. Glücklicherweise heben sich die kubischen Terme jedoch weg und wir erhalten

$$\underbrace{(u'z'_{12}z'_2 - z'_1z'_{12}z'_2 + u'z'_{12}z'_1 - u'z'_1z'_2)}_{:=A}\tau^2 + \underbrace{(-2z'_{12}u' + 2z'_1z'_2)}_{=:B}\tau + \underbrace{z'_{12} - z'_1 + u' - z'_2}_{=:C} = 0 \tag{43}$$

Die Lösung ist

$$\tau = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{44}$$

2. Der χ^2-Anpassungstest

Mit dem χ^2-Anpassungstest (Chi-Quadrat-Test) überprüft man, ob zwei Verteilungen übereinstimmen bzw. ob die Verteilung einer Zufallsvariablen einer bestimmten hypothetischen Verteilung entspricht.

2.1. Die Idee des χ^2-Test

Um die Idee hinter dem χ^2-Anpassungstest zu verstehen, stellen wir uns eine Zufallsvariable X vor. Wir wollen nun folgende Hypothese testen: Die Zufallsvariable X ist standardnormalverteilt. Das heisst wir testen ob X gaußverteilt ist mit Mittelwert 0 und Varianz 1. Wir führen nun ein Zufallsexperiment durch und erhalten den Messwert x_1. Falls x_1 nicht weit von 0 abweicht (z.B. $x_1 = -0.3$), so wären wir nicht skeptisch. Sollte x_1 jedoch stark von 0 abweichen (z.B. $x_1 = 10$), so würden wir uns fragen, ob X wirklich Standardnormalverteilt ist. Natürlich können wir anhand von x_1 nicht sicher entscheiden, ob X standardnormalverteilt ist. Wir können unsere Sicherheit aber erhöhen, indem wir einen weiteren Messwert x_2 betrachten. Wir spielen nun ein paar denkbare Fälle durch:

- $x_1 = -0.3$ und $x_2 = 0.9$: Diese Werte passen zu der Annahme, das X standardnormalverteilt ist. Wir erwarten eine Streuung der x_i um den Wert 0 und wir erwarten auch, dass diese Streuung (verglichen mit der Varianz) nicht zu groß ist.
- $x_1 = 10$ und $x_2 = 9$: Wir würden denken, das X nicht standardnormalverteilt ist, unsere Hypothese ist also zu verwerfen. Die Wahrscheinlichkeit, diese beiden Werte zu messen, wäre extrem klein. Aber wir könnten uns irren, die Wahrscheinlichkeit ist schließlich nur klein aber nicht 0. Wenn wir die Hypothese ablehnen, haben wir also eine gewisse **Irrtumswahrscheinlichkeit**.
- $x_1 = 5$ und $x_2 = 0.1$: Hier fällt es uns schwer, eine Entscheidung zu treffen.

Es ist klar, dass wir für unseren Entscheidungsprozess ein Maß für die Abweichung von unserer Hypothese brauchen. Z.B. könnten wir die Beträge der Abweichungen von 0 aufsummieren.

$$A = \sum_i |x_i| \tag{45}$$

Es ist klar, dass wir die Hypothese verwerfen, wenn A zu groß wird. Aber auch bei einem zu kleinen A ist die Hypothese zu verwerfen, schließlich erwarten wir eine gewisse Streuung der Messwerte um 0 und diese Streuung sollte der Varianz 1 entsprechen. Die Frage ist nun, wie groß bzw. klein A werden muss, damit wir die Hypothese verwerfen. Hierfür berechnen wir den Erwartungswert $\langle A \rangle$. Dann müssen wir noch wissen, wie wahrscheinlich eine bestimmte Abweichung von $\langle A \rangle$ ist und können uns eine bestimmte Grenze setzen, ab der wir verwerfen. Dies ist die Kernidee des χ^2-Anpassungstest. Da mit Beträgen nicht gut zu rechnen ist, benutzt man stattdessen das Quadrat. Das entsprechende Maß für die Abweichung von der Hypothese nennt man χ^2.

$$\chi^2 = \sum_i x_i^2 \tag{46}$$

Wir behandeln nun die Frage nach dem Erwartungswert $\langle \chi^2 \rangle$. Wenn wir eine standardnormalverteilte Zufallsvariable quadrieren, so gehorcht diese wieder einer bestimmten Verteilung. Diese Verteilung χ_1^2 trägt den Namen **χ^2-Verteilung**. Genauer gesagt handelt es sich hierbei um eine χ^2-Verteilung mit einem Freiheitsgrad. Eine standardnormalverteilte Größe hat den Erwartungswert 0. Das Quadrat dieser Grösse hat den Erwartungswert 1 (die Rechnung wird an dieser Stelle nicht aufgeführt). Wenn wir zwei quadrierte standardnormalverteilte Größen addieren, so hat diese Summe dann den Erwartungswert 2. Addieren wir f solche Größen, so hat die Summe der Erwartungswert f. Die entsprechende Verteilung χ_f^2 trägt den Namen χ^2-Verteilung mit f Freiheitsgraden. Es handelt sich um eine stetige Verteilung, deren Dichte nur für $x \geq 0$ positiv ist, da nur positive Zahlen (die Quadrate) addiert werden. Die Dichtefunktion lautet:

$$f(x, f) = \begin{cases} \frac{x^{f/2-1} \cdot e^{-x/2}}{2^{f/2} \cdot \Gamma(f/2)} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \tag{47}$$

Dabei ist $\Gamma(x)$ die Gammafunktion, für die gilt:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^t dt \tag{48}$$

Die entsprechende Verteilungsfunktion $F(x, f)$ ist nicht elementar darstellbar.

$$F(x, f) = \int_0^x \frac{y^{f/2-1} \cdot e^{-y/2}}{2^{f/2} \cdot \Gamma(f/2)} dy \tag{49}$$

Wie bereits weiter oben erwähnt, besitzt die χ^2-Verteilung der Erwartungswert f.

$$\langle \chi_f^2 \rangle = m = \int_0^\infty x \cdot f(x, f) = f \tag{50}$$

Für die Varianz der χ^2-Verteilung gilt

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (x - m)^2 \cdot f(x, f) = 2f \tag{51}$$

Mit Hilfe der Dichtefunktion der χ^2-Verteilung können wir nun einen vernünftigen Ablehnungsbereich für unser χ^2 festzulegen. Dazu erinnern wir uns daran, dass ein Integral über einen bestimmten Bereich der Dichtefunktion uns die Wahrscheinlichkeit gibt, die entsprechende Größe innerhalb dieses Intervalls zu messen. Wenn wir eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% erreichen wollen, so nehmen wir als Ablehnungsbereiche diejenigen beiden Teilflächen unter der Dichtefunktion der χ^2-Verteilung, die ganz rechts und ganz links liegen und jeweils eine Fläche von 2.5% besitzen.

Der entsprechende minimal und maximal zulässige Wert für χ^2 ist die entsprechende Integrationsgrenze.

$$\int_{x=0}^{\chi^2_{min}} f(x, f) dx = 0.025 \tag{52}$$

und

$$\int_{x=0}^{\chi^2_{max}} f(x, f) dx = 0.975 \tag{53}$$

2.2. Der χ^2-Test in der Praxis

Im letzten Abschnitt wurde erklärt, wie wir mit Hilfe des χ^2-Test ermitteln können, ob eine Zufallsvariable standardnormalverteilt ist. In diesem Abschnitt benutzen wir diesen Test, um eine praxisnahe Hypothese zu testen. In Gedanken betrachten wir wieder unsere Ansammlung von N instabilen Kernen (in unserem Fall ^{137}Cs), die einen Nachmittag lang vor unserem Zählrohr liegen. Wir zählen nun die Anzahl der (registrierten) Zerfälle innerhalb einer (nicht zu kurzen) Zeit Δt (z.B. 20 sec.). Dies wiederholen wir d mal. So erhalten wir viele Messwerte n_i mit $i = 1, 2, .., d$.

Die Hypothese lautet nun: Die Präparatstärke ist konstant und entspricht dem Mittelwert der n_i.

Streng genommen ist die Präparatstärke natürlich nicht konstant. Die Halbwertszeit von ^{137}Cs beträgt jedoch etwa $t_{1/2} = 30$ Jahre und ist damit sehr groß gegen die Beobachtungszeit. Daher sollte die Präparatstärke innerhalb der Messgenauigkeit tatsächlich konstant sein.

Wir sind in der Lage zu testen, ob irgendwelche Messwerte standardnormalverteilt sind. Aufgrund der weiter oben ausgeführten Überlegungen wissen wir, dass die n_i alle jeweils aus einer Gaußverteilung kommen. Wenn die Präparatstärke tatsächlich konstant ist, so sollten sie auch alle um den gleichen Mittelwert streuen. Zunächst berechnen wir diesen Mittelwert.

$$m = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} n_i \tag{54}$$

Wir betrachten nun die Differenzen zum Mittelwert $(n_i - m)$. Diese Werte sind gaußverteilt um den Mittelwert 0. Wenn wir jetzt noch durch die Standardabweichung dividieren, so erhalten wir Werte, die standardnormalverteilt sind. Da unsere Gaußverteilung die Grenzverteilung aus einer Poisson-Verteilung ist, gilt in unserem Fall $\sigma^2 = m$. Also sind die Werte $(n_i - m)/\sqrt{m}$ standardnormalverteilt. Jetzt können wir einfach wie bisher das χ^2 berechnen.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{d} \frac{(n_i - m)^2}{m} \tag{55}$$

2.3. Totzeit und χ^2

Da unser Detektor eine Totzeit besitzt, sind die gemessenen Zählraten $n_i/\Delta t$ nicht identisch mit den wahren Zählraten. Wir untersuchen hier die Frage, was die Totzeit für den χ^2-Test bedeutet.

Zu jeder gemessenen Anzahl n_i gibt es daher eine totzeitkorrigierte Anzahl k_i.

$$\frac{k_i}{\Delta t} = \frac{\frac{n_i}{\Delta t}}{1 - \frac{m}{\Delta t}\tau} \tag{56}$$

bzw.

$$k_i = \frac{n_i}{1 - \frac{m}{\Delta t}\tau} \tag{57}$$

Dann erhalten wir einen neuen Mittelwert

$$M = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} k_i \tag{58}$$

und wir können das neue korrigierte χ^2 berechnen.

$$\chi^2_{kor} = \sum_{i=1}^{d} \frac{(k_i - M)^2}{M} \tag{59}$$

Das geht jedoch auch einfacher, ohne dass wir die k_i berechnen müssen.

$$\begin{aligned}
\chi^2_{kor} &= \sum_{i=1}^{d} \frac{\left(\frac{n_i}{1-\frac{m}{\Delta t}\tau} - \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} k_i\right)^2}{\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} k_i} \\
&= \sum_{i=1}^{d} \frac{\left(\frac{n_i}{1-\frac{m}{\Delta t}\tau} - \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} \frac{n_i}{1-\frac{m}{\Delta t}\tau}\right)^2}{\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} \frac{n_i}{1-\frac{m}{\Delta t}\tau}} \\
&= \frac{1}{1-\frac{m}{\Delta t}\tau} \sum_{i=1}^{d} \frac{\left(n_i - \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} n_i\right)^2}{\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} n_i} \\
&= \frac{1}{1-\frac{m}{\Delta t}\tau} \sum_{i=1}^{d} \frac{(n_i - m)^2}{m} \\
&= \frac{1}{1-\frac{m}{\Delta t}\tau} \chi^2
\end{aligned} \tag{60}$$

Das korrigierte χ^2 ist größer als das nicht korrigierte. Wir messen also ein zu kleines χ^2. Intuitiv mag mancher annehmen, dass die Totzeit ein zu großes χ^2 zur Folge hat. Das Gegenteil ist der Fall. Die Varianz der gemessenen Verteilung ist kleiner als die wahre Varianz und das gemessene χ^2 ist kleiner als das wahre χ^2. Daran sehen wir, wie wichtig es ist, dass wir uns über den Einfluss der Messapparatur auf die Messung im Klaren sind und die entsprechende Korrektur durchführen. Ohne Korrektur würden wir evtl. eine Hypothese verwerfen, die wir eigentlich nicht verwerfen sollten und umgekehrt.

3. Versuchsdurchführung

Bringen Sie zum Versuch einen FAT-formatierten USB-Stick mit.

3.1. Bemerkungen zur Versuchsvorbereitung

Grundsätzlich ist es nicht wichtig, komplizierte Herleitungen zu kennen. Für die Vorbesprechung sollten sie sich aber auf folgende Stichpunkte bzw. Fragen vorbereiten:

- Welche Halbwertszeit haben die Kerne der verwendeten Quellen?
- Was ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion, Wahrscheinlichkeitsdichte und Wahrscheinlichkeitsverteilung?
- Wie hängen die Binomialverteilung, Poisson-Verteilung und Gaußverteilung zusammen?

- Was ist die Varianz einer Verteilung? Wie ist diese definiert, wenn entweder der tatsächliche oder der experimentell bestimmte Mittelwert bekannt sind?
- Was ist eine Intervallverteilung?
- Was hat die Binomial-, Poisson-, Gauß-, und Intervallverteilung mit dem Zerfall von Kernen zu tun?
- Wie funktioniert ein Geiger-Müller-Zählrohr?
- Was ist die Totzeit eines Detektors?
- Wie misst man die Totzeit mit der Zwei-Präparate-Methode?
- Wie wirkt sich die Totzeit auf die gemessenen Zählraten aus?
- Wie wirkt sich die Totzeit auf eine gemessene Verteilung (z.B. Gaußverteilung) aus?
- Was eine χ^2-Verteilung und wie funktioniert ein χ^2-Test?
- Warum können wir mit dem χ^2-Test Hypothesen ablehnen (mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit) oder nicht ablehnen, aber niemals annehmen?
- Das χ^2 ist ein Maß für die Abweichung der Daten von der Hypothese. Warum ist es trotzdem wichtig, auch bei einem zu kleinen χ^2 die Hypothese abzulehnen? Bedeutet ein kleines χ^2 nicht, dass die Daten sehr gut zur Hypothese passen?

3.2. Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau besteht aus folgenden Komponenten:

- Zwei ^{137}Cs-Quellen
- Zählrohr, Spannungsversorgung für das Zählrohr
- Zählrohrelektronik, Zähler, Signalstretcher
- Computer

Mit der Spannungsversorgung stellen wir die gewünschte Zählrohrspannung ein. Die Zählrohrelektronik gibt an einem Ausgang jedes Mal, wenn das Zählrohr Strahlung registriert, ein Rechtecksignal aus. Wir haben jetzt zwei Möglichkeiten. Wir können das Rechtecksignal zum Eingang des Zählers oder über den Signalstretcher zum Computer führen. Am Zähler können wir eine Zeitspanne einstellen und auf Knopfdruck beginnt der Zähler zu zählen, bis die Zeitspanne abgelaufen ist. Am Computer haben wir die Möglichkeit, eine bestimmte Zeit lang aufzunehmen und nicht nur die Anzahl der Signale innerhalb dieser Zeitspanne, sondern auch die Zeitpunkte der Signale zu bestimmen.

3.3. Datenaufnahme

Für die Datenaufnahme mit dem Computer sollten alle Einstellungen schon vorhanden sein. Der Vollständigkeit halber ist hier jedoch alles nötige aufgeführt. Die Datenaufnahme erfolgt über die Soundkarte. Die zeitliche Länge der Signale darf hierfür eine gewisse Dauer nicht unterschreiten. Sind die Signale hingegen zu lang, so wird dadurch die Totzeit künstlich verlängert. Daher gehört ein Nim-Modul (logic shaper), welches ein Einstellen der Signaldauer von etwa 20ns bis etwa 400ns erlaubt, zum Versuchsaufbau. Der oberste Kanal des Moduls ist richtig eingestellt. Der Ausgang wird mit dem Mikrophoneingang verbunden.

Die Datenaufnahme erfolgt mit dem Programm `get_signals.py`. Öffnen Sie dieses über das Terminal, geben Sie die gewünschte Messdauer in Sekunden ein und starten Sie die Messung. Speichern Sie danach die Datei ab. Diese Textdatei enthält in jeder Zeile eine Zahl, welche dem Zeitpunkt (in Sekunden) eines Signals entspricht. Das sollte etwa so aussehen:

```
0.005669
0.010431
0.013447
0.016236
0.018639
0.029070
0.041655
0.059637
  ...
```

Zur Bearbeitung dieser Dateien werden eine Reihe von Hilfsprogrammen bereitgestellt. Diese heißen `divide.py`, `binomial.py` und `interval.py`. Nutzen Sie diese bereits während der Wartezeiten vor Ort, und kopieren Sie sich die Daten und Programme auf den mitgebrachten USB-Stick.

3.4. Durchzuführende Messungen

Führen sie die drei folgenden Messungen mit dem Computer durch:

1. 45 Minuten mit Quelle Nr. 6 bei 600 Volt
2. 45 Minuten mit Quelle Nr. 6 bei 500 Volt
3. 45 Minuten mit Quelle Nr. 6 und Nr. 7 zusammen bei 500 Volt

Zur Bestimmung der Totzeit des Zählrohrs mittels der Zwei-Präparate-Methode führen sie folgende Messungen jeweils 5 Minuten lang mit dem Zähler durch:

- Quelle Nr. 6 bei 500, 550 und 600 Volt
- Quelle Nr. 7 bei 500, 550 und 600 Volt

- Quelle Nr. 6 und Nr. 7 zusammen bei 500, 550 und 600 Volt
- Untergrund bei 500, 550 und 600 Volt

Extrahieren sie für alle Messungen, die sie mit dem Computer durchgeführt haben, eine Poisson-, eine Gaußverteilung und Intervallverteilungen mit unterschiedlichen Untersetzungen.

4. Auswertung

Für die Auswertung werden die Text-Dateien, welche die Zeitpunkte der Signale enthalten, benötigt. Zur Bearbeitung dieser Dateien werden eine Reihe von Hilfsprogrammen bereitgestellt. Diese heißen *divide.py*, *binomial.py* und *interval.py*. Eine kurze Anleitung findet sich weiter unten.

Aufgaben zur Poisson-Verteilung

1. Extrahieren Sie die Poisson-Verteilung als Histogramm durch die Wahl eines geeigneter Histogrammparameter für alle drei Messungen.
2. Vergleichen Sie diese Poisson-Verteilungen mit der jeweiligen dazugehörigen theoretischen Verteilung.
$$P(n, \lambda) = N \cdot \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \tag{61}$$
N ist dabei der Normierungsfaktor, also die Fläche unter der experimentellen Verteilung (Summe der Höhen aller Histogrammbalken).
3. Vergleichen Sie die drei Poisson-Verteilungen miteinander. Bestimmen sie hierzu auch die Mittelwerte und Varianzen.

Aufgaben zur Gauß-Verteilung

1. Extrahieren Sie die Gauß-Verteilung mit einem Zeitintervall Δt von etwa 5 bis 10s und geeignetem Zusammenfassen von Histogrammbalken (sogenanntes Binning) für alle drei Messungen.
2. Bestimmen Sie für diese Histogramme der Gauß-Verteilungen die dazugehörigen theoretischen Verteilungen (grafisch darstellen). Bestimmen sie hierzu den Mittelwert m mit Hilfe der gemessenen Zählrate z' sowie den Normierungfaktor F aus Ihren Daten (Summe der Höhe aller Histogrammbalken bzw. Anzahl der Messungen). Die theoretische Kurve enthält damit keine unbekannten Parameter mehr, ein Anfitten ist hier nicht nötig.
$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \cdot F \cdot \sqrt{n} e^{-\frac{(x-m)^2}{2m/n}} \tag{62}$$

mit

$$m = z' \cdot \frac{\Delta t}{n} \tag{63}$$

wobei n hier eine ganze Zahl ist, die angibt, wie viele Histogrammbalken zu einem zusammengefasst sind (Binning).

3. Was fällt Ihnen beim Vergleich der Histogramme mit den theoretischen Verteilungen auf? Wie erklären Sie sich die Diskrepanz?

Aufgaben zur Intervall-Verteilung

1. Stellen Sie für die Messung 2 die Intervallverteilung für $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$ dar.

2. Vergleichen sie die theoretische Funktion für $n = 0$ mit den entsprechenden Messdaten. Fitten Sie hierzu die theoretische Funktion

$$P(t) = N \cdot a \cdot e^{-at} \tag{64}$$

an das gemessene Histogramm für $n = 0$ an. Für die Normierungskonstante N gilt $N = T \cdot a$, wobei T die Gesamtdauer der Messung (also der Zeitpunkt des letzten gemessenen Ereignisses) ist. Bestimmen Sie hieraus die Totzeit mit Hilfe der Formel $a = \frac{a'}{1-a'\tau}$ und der gemessenen Zählrate a'.

Warum ist das Anfitten für die Fälle mit $n = 1$ und $n = 2$ problematisch?

Aufgaben zum χ^2-Test Untersuchen Sie folgende Hypothesen mit dem χ^2–Test. Benutzen Sie die ersten 51 (warum nicht z.B. 50?) Messwerte, d.h. Zählraten pro Zeitintervall von z.B. 10 Sekunden Länge aus Messung 3. Bestimmen sie jeweils das χ^2 sowohl für die **nicht-totzeitkorrigierten als auch für die totzeitkorrigierten** Daten.

a: Die Präparatstärke ist konstant im betrachteten Zeitraum und gleicht dem Mittelwert der 51 Messwerte.

b: Die Präparatstärke ist konstant im betrachteten Zeitraum und gleicht dem Mittelwert der 51 Messwerte minus 10%.

c: Die Präparatstärke nimmt im betrachteten Zeitraum linear mit der Zeit ab (als erste Näherung eines exponentiellen Abfalls). Die Anfangszählrate ist der Mittelwert, und der Abfall von einer Messung zur anderen sei 1.

1. Zeigen Sie zeichnerisch, was die Hypothesen a, b und c besagen.

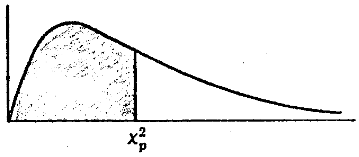
2. Welche Halbwertszeit ergibt sich aus der Hypothese c, wenn Sie einen zeitlichen Abstand der Messungen von 10 Sekunden annehmen als Näherung eines exponentiellen Zerfalls?

Aufgaben zur Totzeit des Zählrohrs Bestimmen sie die Totzeit des Zählrohrs mittels der Zwei-Präparate-Methode für die drei Zählrohrspannungen 500, 550 und 600 Volt inklusive Fehlerrechnung.

A. χ^2-Verteilungen

Appendix

PERCENTILE VALUES (χ_p^2)
for
THE CHI-SQUARE DISTRIBUTION
with ν degrees of freedom
(shaded area $= p$)



ν	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.75}$	$\chi^2_{.50}$	$\chi^2_{.25}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.005}$
1	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	.455	.102	.0158	.0039	.0010	.0002	.0000
2	10.6	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	.575	.211	.103	.0506	.0201	.0100
3	12.8	11.3	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	.584	.352	.216	.115	.072
4	14.9	13.3	11.1	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	.711	.484	.297	.207
5	16.7	15.1	12.8	11.1	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	.831	.554	.412
6	18.5	16.8	14.4	12.6	10.6	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	.872	.676
7	20.3	18.5	16.0	14.1	12.0	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	.989
8	22.0	20.1	17.5	15.5	13.4	10.2	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34
9	23.6	21.7	19.0	16.9	14.7	11.4	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73
10	25.2	23.2	20.5	18.3	16.0	12.5	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16
11	26.8	24.7	21.9	19.7	17.3	13.7	10.3	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60
12	28.3	26.2	23.3	21.0	18.5	14.8	11.3	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07
13	29.8	27.7	24.7	22.4	19.8	16.0	12.3	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57
14	31.3	29.1	26.1	23.7	21.1	17.1	13.3	10.2	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07
15	32.8	30.6	27.5	25.0	22.3	18.2	14.3	11.0	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60
16	34.3	32.0	28.8	26.3	23.5	19.4	15.3	11.9	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14
17	35.7	33.4	30.2	27.6	24.8	20.5	16.3	12.8	10.1	8.67	7.56	6.41	5.70
18	37.2	34.8	31.5	28.9	26.0	21.6	17.3	13.7	10.9	9.39	8.23	7.01	6.26
19	38.6	36.2	32.9	30.1	27.2	22.7	18.3	14.6	11.7	10.1	8.91	7.63	6.84
20	40.0	37.6	34.2	31.4	28.4	23.8	19.3	15.5	12.4	10.9	9.59	8.26	7.43
21	41.4	38.9	35.5	32.7	29.6	24.9	20.3	16.3	13.2	11.6	10.3	8.90	8.03
22	42.8	40.3	36.8	33.9	30.8	26.0	21.3	17.2	14.0	12.3	11.0	9.54	8.64
23	44.2	41.6	38.1	35.2	32.0	27.1	22.3	18.1	14.8	13.1	11.7	10.2	9.26
24	45.6	43.0	39.4	36.4	33.2	28.2	23.3	19.0	15.7	13.8	12.4	10.9	9.89
25	46.9	44.3	40.6	37.7	34.4	29.3	24.3	19.9	16.5	14.6	13.1	11.5	10.5
26	48.3	45.6	41.9	38.9	35.6	30.4	25.3	20.8	17.3	15.4	13.8	12.2	11.2
27	49.6	47.0	43.2	40.1	36.7	31.5	26.3	21.7	18.1	16.2	14.6	12.9	11.8
28	51.0	48.3	44.5	41.3	37.9	32.6	27.3	22.7	18.9	16.9	15.3	13.6	12.5
29	52.3	49.6	45.7	42.6	39.1	33.7	28.3	23.6	19.8	17.7	16.0	14.3	13.1
30	53.7	50.9	47.0	43.8	40.3	34.8	29.3	24.5	20.6	18.5	16.8	15.0	13.8
40	66.8	63.7	59.3	55.8	51.8	45.6	39.3	33.7	29.1	26.5	24.4	22.2	20.7
50	79.5	76.2	71.4	67.5	63.2	56.3	49.3	42.9	37.7	34.8	32.4	29.7	28.0
60	92.0	88.4	83.3	79.1	74.4	67.0	59.3	52.3	46.5	43.2	40.5	37.5	35.5
70	104.2	100.4	95.0	90.5	85.5	77.6	69.3	61.7	55.3	51.7	48.8	45.4	43.3
80	116.3	112.3	106.6	101.9	96.6	88.1	79.3	71.1	64.3	60.4	57.2	53.5	51.2
90	128.3	124.1	118.1	113.1	107.6	98.6	89.3	80.6	73.3	69.1	65.6	61.8	59.2
100	140.2	135.8	129.6	124.3	118.5	109.1	99.3	90.1	82.4	77.9	74.2	70.1	67.3

Source: Catherine M. Thompson, *Table of percentage points of the χ^2 distribution*, Biometrika, Vol. 32 (1941), by permission of the author and publisher.

B. Hilfsprogramme

Die Hilfsprogramme sind in Python geschrieben und sollten unter Windows und Linux funktionieren. Windows-Benutzer müssen hierfür in der Regel noch Python installieren. Die Hilfsprogramme werden aus der Kommandozeile gestartet. Die Ausgabe erfolgt auf den Bildschirm.

Mit dem Zusatz `> filename.txt`, der an den Befehl angehangen wird, lässt sich die Ausgabe in eine Textdatei umleiten. Diese Textdatei kann mit fast jedem beliebigem Programm verarbeitet werden (Python, gnuplot, Excel, OpenOffice, usw.), um eine Grafik zu erzeugen.

divide.py

Dieses Programm unterteilt die Messzeit in gleich lange Zeitintervalle und zählt die Anzahl der Signale in jedem Zeitintervall. Dies wird für den χ^2-Test benötigt.

Beispiel: `divide.py filename.txt 10 > outputdatei.txt`

Der erste Parameter (`filename.txt`) ist die Textdatei, welche die Zeiten der Signale enthält. Der zweite Parameter (hier `10`) entspricht einer Zeit in Sekunden. Die Gesamtmesszeit wird in Bereiche dieser Länge unterteilt. Dann wird die Anzahl der Signale in jedem Zeitbereich gezählt.

binomial.py

Dieses Programm extrahiert eine Binomialverteilung aus den Daten. Je nachdem, welche Parameter angegeben werden, ist die Poisson-Verteilung oder auch die Gaußverteilung eine gute Näherung für die extrahierten Daten.

Beispiel: `binomial.py filename.txt 0.2 1 > outputdatei.txt`

Der erste Parameter (`filename.txt`) ist die Textdatei, welche die Zeiten der Signale enthält. Der zweite Parameter (hier `0.2`) entspricht einer Zeit in Sekunden. Die Gesamtmesszeit wird in Bereiche dieser Länge unterteilt. Dann wird die Anzahl der Signale in jedem Zeitbereich gezählt. Die Häufigkeitsverteilung dieser Zahlen entspricht einer Binomialverteilung. Der letzte Parameter (hier `1`) muss ganzzahlig sein und gibt an, wie viele benachbarte Histogrammbaken dieser Verteilung jeweils zur einer Zusammengefasst werden sollen. Für einen ersten Test kann der letzte Parameter immer mit `1` angegeben werden.

interval.py

Mit Hilfe dieses Programms kann eine Intervallverteilung aus den Daten extrahiert werden.

Beispiele:

```
interval.py filename.txt 0.001 1 > outputdatei.txt
interval.py filename.txt 0.001 2 > outputdatei.txt
interval.py filename.txt 0.001 3 > outputdatei.txt
```

Der erste Parameter (`filename.txt`) ist die Textdatei, welche die Zeiten der Signale enthält. Der zweite Parameter entspricht einer Zeit in Sekunden. Der dritte Parameter gibt an, ob die Zeitdifferenz zum jeweils nächsten Signal, übernächsten Signal, überübernächsten Signal usw. betrachtet wird. Das Ergebnis ist ein Histogramm der Häufigkeitsverteilung der Zeitdifferenzen der Signale. Wird die Zeit (der zweite Parameter) wie hier in diesem Beispiel mit `0.001` Sekunden angegeben, so wird gezählt, wie oft die Zeitdifferenz zwischen 0 und 0.001 Sekunde lag, wie oft zwischen 0.001 und 0.002 usw.

Literatur

[1] E. Cramer und U. Kamps, *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik* (Springer, 2020), ISBN: 9783662605523, 10.1007/978-3-662-60552-3.

[2] J. Puhani, *Statistik* (Springer, 2020), ISBN: 978-3-658-28955-3, 10.1007/978-3-658-28955-3.

[3] J. Puhani, *Kleine Formelsammlung zur Statistik* (Springer, 2020), ISBN: 978-3-658-28953-9, 10.1007/978-3-658-28953-9.

[4] W. Tschirk, *Statistik: Klassisch oder Bayes* (Springer, 2020), ISBN: 978-3-642-54385-2, 10.1007/978-3-642-54385-2.

[5] G. R. Gilmore, *Practical Gamma-Ray Spectrometry* (John Wiley & Sons, 2008), ISBN: 9780470861981, 10.1002/9780470861981.

[6] G. Knoll, *Radiation Detection and Measurement* (Wiley, 2010), ISBN: 9780470131480.